

جزوه کمک آموزشی نمونه سوالات حل شده درس:

ریاضی (۳)

فصل سوم

مقطع تحصیلی:

دوره دوم متوسطه

پایه:

دوازدهم

تهیه و تنظیم:

مرکز تحقیقات مهندسی ثمین

تمامی حقوق این اثر برای مرکز تحقیقات ثمین محفوظ می باشد.

۱- تابع f با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - a & , x \geq 0 \\ \frac{x^2 - 2b}{2} & , x < 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. حد راست و چپ را در نقطه ی $x = 2$ بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x^2 - a = 12 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 2b}{2} = 4 - b$$

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - [x]}{2x^2 - 2}$ بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{2x^2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{2(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{2(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{4}$$

۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{3x} - 3}$ بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{3x} - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{3x} - 3} \times \frac{\sqrt{3x} + 3}{\sqrt{3x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(\sqrt{3x} + 3)}{3x - 9} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(\sqrt{3x} + 3)}{3(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} + 3}{3} = 2$$

۴- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{(x+2)(x+1)} \times \frac{(\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)}{(x+2)(x+1)(\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{3}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})}{2(x - \frac{1}{2})(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4(x - \frac{1}{2})}{2(x+1)} = \frac{0}{3} = 0$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 13x + 24x - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(2x^2 - 7x + 3)} = \frac{1}{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x+2)}{(2x^2 - 7x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{2(x-3)(x-\frac{1}{2})} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x+2)}{(2x^2 - 7x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{2(x-3)(x-\frac{1}{2})} = -\infty \end{array} \right.$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow \delta^-} \frac{2x}{x - \delta} = \frac{1 \cdot 0}{0^-} = -\infty$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow \delta^+} \frac{2x}{x - \delta} = \frac{1 \cdot 0}{0^+} = +\infty$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x(2x - 1)}{(2x - 1)(2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x}{2x + 1} = \frac{1}{4}$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{-3(-2)}{(-4)(0^-)} = \frac{6}{\cdot^-} = +\infty$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cdot^-} = -\infty$$

$(\frac{\pi}{2})^+$ = ناحیه دوم
 $(\frac{\pi}{2})^-$ = ناحیه اول

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cdot^-} = -\infty$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cdot^+} = +\infty$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{2 - 3}{3 - 3} = \frac{-1}{\cdot^-} = +\infty$$

۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۵)

$$\frac{3}{2} (۴)$$

$$\frac{1}{2} (۳)$$

$$-\frac{3}{2} (۲)$$

$$-\frac{5}{2} (۱)$$

$$\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{6 - x^2 - x}{x(x-2)} = \frac{x^2 + x - 6}{-x(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{-x(x-2)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{-x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{-x} = \frac{5}{-2}$$

۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۷)

(۴) -۷۲

(۳) -۸۴

(۲) -۹۶

(۱) -۱۱۲

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x^2 - 10x - 8)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{2 - \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x^2 - 10x - 8)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{2 - \sqrt{x}} \times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x^2 - 10x - 8)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)(2 + \sqrt{x})}{4 - x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)(2 + \sqrt{x})}{(4-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} -(3x+2) \left(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1 \right) (2 + \sqrt{x})$$

$$= -(14)(2)(4) = -112$$

۷- عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

حد تابع $f(x)$ وقتی با مقادیری کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود حاصلش از هر عدد مثبت دلخواه بزرگی، بزرگتر است.

۸- عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می شود حاصلش از هر عدد منفی دلخواه کوچکی، کوچکتر است.

۹- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 5t^2}{t^2 + 3t} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5t^2}{t^2} = -5$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-3x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = \frac{5}{+\infty} = 0$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^4 + 5x^2}{2x^3 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^4}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = -\infty$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{4}{x} - 5)} = \frac{3}{-5}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2}}{x + \sqrt{9x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + |x|}{x - |3x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + x}{x - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{-2x} = \frac{4}{-2} = -2$$

۱۰- عبارت $\lim f(x) = -1$ به چه معناست؟

اگر x به اندازه ی کافی بزرگ انتخاب شود تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می توان به -1 نزدیک کرد.

۱۱- عبارت $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ به چه معناست؟

اگر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شود تابع $f(x)$ را می توان به هر اندازه دلخواه به عدد 2 نزدیک کرد.

۱۲- در تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ ، آن گاه حد تابع

$f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ کدام است؟

$$\frac{5}{4} \text{ (۴)} \quad \frac{3}{2} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{6} \text{ (۲)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 2)x}{2x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{a + 2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x + \sqrt{4x^2 + 5})}{2(x+1)} \times \frac{(3x + \sqrt{4x^2 + 5})}{(3x + \sqrt{4x^2 + 5})} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^2 - 4x^2 + 5}{2(x+1)(3x + \sqrt{4x^2 + 5})} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 - 15}{2(x+1)(3x + \sqrt{4x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5(x-1)(x+1)}{2(x+1)(3x + \sqrt{4x^2 + 5})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5(x-1)}{2(3x + \sqrt{4x^2 + 5})} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$