

ریاضی

فصل دوم

مقطع تحصیلی:

دوره اول متوسطه

پایه:

هفتم

تهیه و تنظیم:

مرکز تحقیقات مهندسی ثمین

تمامی حقوق این اثر برای مرکز تحقیقات ثمین محفوظ می باشد.

ریاضی هفتم - فصل دوم - عدد های صحیح

❖ معرفی عددهای علامت دار

یادآوری: قرینه هر عدد منفی عددی مثبت و قرینه هر عدد مثبت عددی منفی است. قرینه صفر هم خود صفر است. برای نمایش قرینه هر عدد از نماد (-) در سمت چپ آن عدد استفاده می کنیم. به عنوان مثال:

$$3 = -(-3) = \text{قرینه}(-3)$$

$$-5 = -(5) = \text{قرینه}(5)$$

نکته:

۱- قرینه ی عدد صفر، خود صفر است.

۲- قرینه ی قرینه ی هر عدد با خود آن عدد برابر است.

$$+4 = -(-(+4)) = \text{قرینه ی قرینه ی } +4$$

$$-3 = -(-(-3)) = \text{قرینه ی قرینه ی } -3$$

۵- علامت مثبت پشت یک عدد را می توان در نظر نگرفت.

$$+4 = 4 \text{ یا } +(-4) = -4$$

یادآوری: اعداد طبیعی در واقع همان ۱، ۲، ۳، ۴، ... هستند که از آنها برای شمارش استفاده می کنیم. این اعداد به همراه صفر و قرینه ی عددهای طبیعی؛ یعنی ۱-، ۲-، ۳- و ... مجموعه ی اعدادی را تشکیل می دهند که به آن ها عددهای صحیح می گوئیم. به بیان دیگر، عددهای صحیح به سه دسته تقسیم می شوند:

$$+1, +2, +3, \dots$$

(۱) عددهای صحیح مثبت:

.

(۲) عدد صفر؛

...، -۳، -۲، -۱

۳) عددهای صحیح منفی؛

نکته: عدد صفر علامت ندارد.

مثال: قرینه‌ی اعداد زیر را بنویس.

$$\begin{array}{cccc} +۳ & ۱۱ & -۴۰۰۱۲ & -(+۳) \\ -۲ & ۱۰۹ & ۰ & -(-۷) \end{array}$$

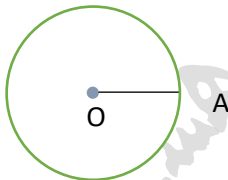
پاسخ:

$$\begin{array}{lll} -(+۳) = -۳ & -(۱۱) = -۱۱ & -(-۴۰۰۱۲) = +۴۰۰۱۲ \\ -(-۲) = +۲ & -(۱۰۹) = -۱۰۹ & -۰ = ۰ \end{array}$$

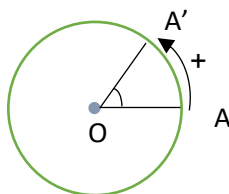
$$\begin{array}{l} -(-(+۳)) = -(-۳) = +۳ \\ -(-(-۷)) = -(+۷) = -۷ \end{array}$$

❖ نشان دادن یک زاویه با اعداد صحیح

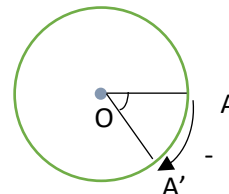
در شکل مقابل، نقطه‌ی A روی محیط دایره حرکت می‌کند. در وضعیت OA زاویه‌ی صفر درجه نشان داده شده است.



وقتی نقطه‌ی A روی دایره حرکت می‌کند تا به نقطه‌ی A' برسد، یک زاویه ایجاد می‌شود که با توجه به جهت حرکت نقطه‌ی A روی دایره، اندازه‌ی این زاویه را با علامت + یا - بیان می‌کنیم.

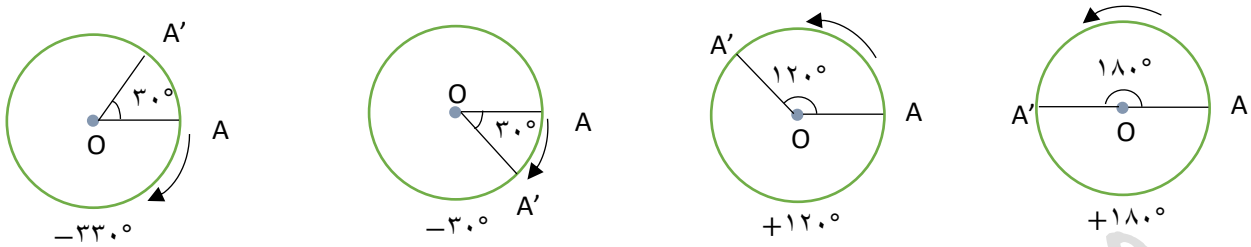


خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت



هم جهت با حرکت عقربه‌های ساعت

مثلاً در شکل‌های زیر، چند زاویه با عدد علامت‌دار بیان شده است.



❖ مقایسه اعداد صحیح

دو عدد صحیح متفاوت را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: یا هر دو مثبت هستند یا یکی مثبت و یا هر دو منفی. اگر هر دو مثبت باشند، در واقع هر دو عدد طبیعی‌اند و مقایسه‌ی آن‌ها مثل اعداد طبیعی است.

$$\textcircled{+} < \textcircled{+} \xrightarrow{\text{مثال}} +2 < +6$$

اگر یکی مثبت باشد و دیگری منفی، عدد مثبت همواره از عدد منفی بزرگتر است:

$$\textcircled{-} < \textcircled{+} \xrightarrow{\text{مثال}} -5 < +3$$

اگر هر دو منفی باشند، عددی که بدون در نظر گرفتن علامت کوچکتر باشد، بزرگتر است:

$$\textcircled{-} < \textcircled{-} \xrightarrow{\text{مثال}} -7 < -4$$

ضمناً تمام اعداد منفی از صفر کوچکتر هستند.

مثال: در جای خالی علامت مناسب $>$ یا $=$ یا $<$ قرار دهید.

الف) $+7 \boxed{>} -7$ ب) $0 \boxed{>} -99$ ج) $0 \boxed{<} +18$

د) $-212 \boxed{<} 1$ هـ) $+7 \boxed{=} 7$

مثال: اعداد هر سطر را جداگانه، به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کن:

۱۹, ۱۳, -۱۱, ۲, -۱۸, -۱۷, ۰, -۱, -۹, -۵, ۷

-۱۱, ۱۰۱, -۱۱۱, ۱۱, -۱۰, -۱۰۱۱, -۱۱۰۱, -۱۰۱, ۱۱۱۰, -۱۰۰۱

پاسخ:

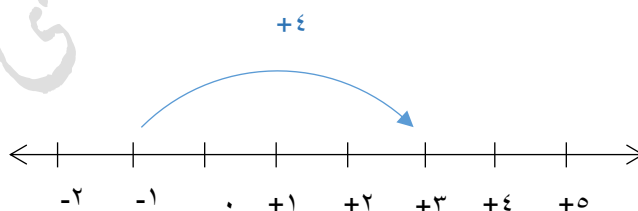
۱۹ و ۱۳ و ۷ و ۲ و ۰ و -۱ و -۵ و -۹ و -۱۱ و -۱۷ و -۱۸

۱۱۰ و ۱۰۱ و ۱۱ و -۱۰ و -۱۱ و -۱۰۱ و -۱۱۱ و -۱۰۰۱ و -۱۰۱۱ و -۱۱۰۱

❖ حرکت روی محور عددهای صحیح

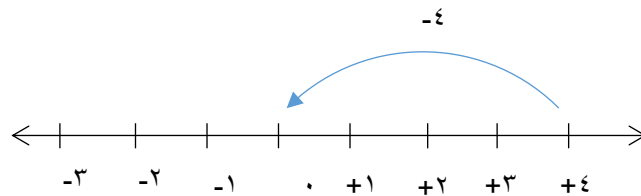
هر حرکت روی محور عددهای صحیح را می‌توان با یک عدد علامت‌دار بیان کرد. اگر جهت حرکت، به سمت مثبت محور باشد، آن را با علامت مثبت بیان می‌کنیم.

در این محور، حرکت، با عدد علامت‌دار +۴ بیان شده است؛ زیرا به اندازه‌ی ۴ واحد در جهت مثبت حرکت کرده‌ایم.

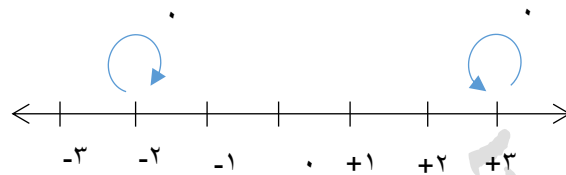


هم‌چنین اگر جهت حرکت، به سمت منفی محور باشد، آن را با علامت منفی بیان می‌کنیم.

در این محور، حرکت، با عدد علامت‌دار -۴ بیان شده است؛ زیرا به اندازه‌ی ۴ واحد در جهت منفی حرکت کرده‌ایم.

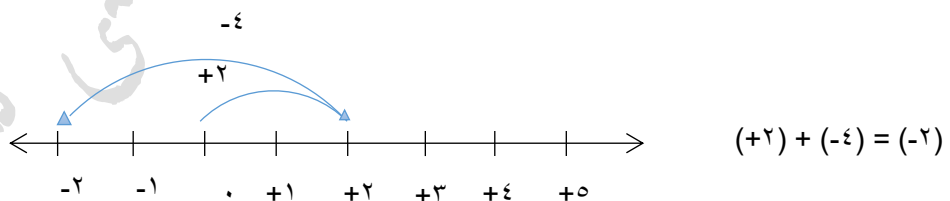
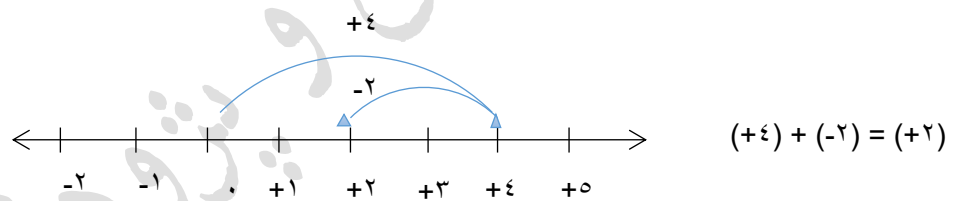


اگر در محور عددها، روی یک نقطه باشیم و هیچ گونه حرکتی نداشته باشیم، آن را با عدد صفر به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم.



❖ جمع و تفریق عددهای صحیح

برای هر دو حرکت پشت سر هم روی محور عددهای صحیح، می‌توان یک جمع نوشت.



در محور اول $(-2) + (+4)$ همان تفریقی است که در دوره‌ی ابتدایی می‌نوشتیم، یعنی:

$$4 - 2$$

پس تفریق را هم می‌توان به جمع تبدیل کرد، یعنی:

$$4 - 2 = 4 + (-2)$$

نکته: برای به دست آوردن حاصل تفریق دو عدد به کمک محور عددها، باید تفریق را به جمع تبدیل کنیم.

مثال: تفریق‌های زیر را به جمع تبدیل کنید.

الف) $7 - 11 = 7 + (-11)$

ب) $-5 - (+3) = -5 + (-(+3)) = -5 + (-3)$

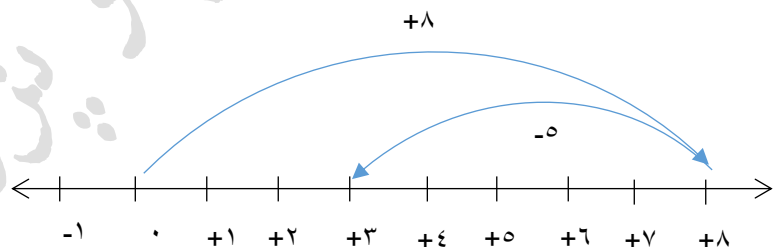
ج) $8 - 5 = 8 + (-5)$

د) $-5 - (-3) = -5 + (-(-3)) = -5 + 3$

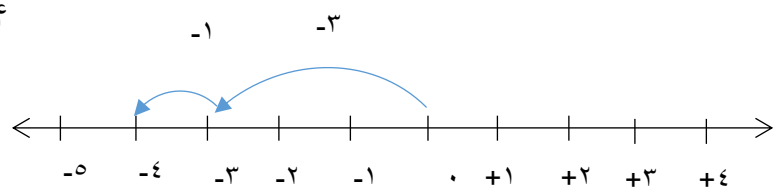
ه) $-7 - 4 = -7 + (-4)$

مثال: برای هر جمع یا تفریق، یک محور رسم کرده و به کمک آن حاصل را به دست آورید.

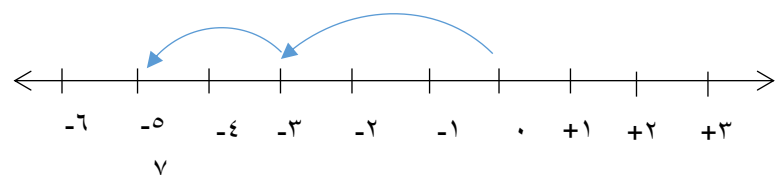
الف) $8 + (-5) = +3$



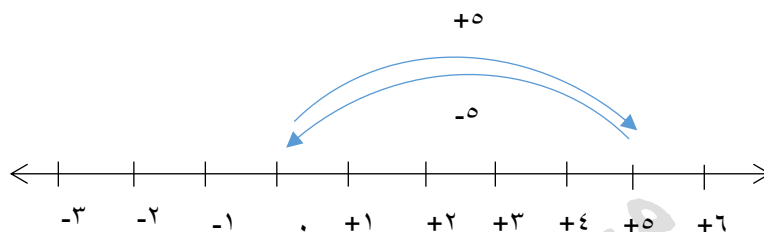
ب) $-3 - 1 = -3 + (-1) = -4$



ج) $-3 - (+2) = -3 + (-(+2)) = -3 + (-2) = -5$



$$د) ۵ - (+۵) = ۵ = (-۵) = ۰$$



نکته:

۱- حاصل جمع هر عدد صحیح با صفر، خود آن عدد خواهد بود.

$$۰ + (-۳) = -۳$$

۲- حاصل جمع هر عدد صحیح با قرینه‌اش، برابر صفر می‌شود.

$$(+۳) + (-۳) = ۰$$

نکته:

۱- در جمع دو عدد صحیح، اگر هر دو عدد مثبت باشند، جمع آن‌ها مثل جمع دو عدد طبیعی انجام می‌شود. مثلاً:

$$(+۳) + (+۴) = ۳ + ۴ = ۷$$

۲- در جمع دو عدد صحیح، اگر هر دو عدد منفی باشند، حاصل جمع، برابر قرینه‌ی مجموع دو عدد، بدون در نظر گرفتن علامت آن‌ها است. مثلاً:

$$(-۳) + (-۴) = -(۳ + ۴) = -۷$$

نکته: اگر در جمع دو عدد صحیح، یکی از دو عدد مثبت و دیگری منفی باشد آن دو عدد را بدون در نظر گرفتن علامت ها از یکدیگر کم می کنیم و علامت عددی که بدون در نظر گرفتن علامت ها بزرگتر است را می گذاریم. به عنوان مثال در جمع $6+8$ ابتدا دو عدد ۶ و ۸ را از هم کم می کنیم که پاسخ برابر است با ۲، حال برای بدست آوردن علامت حاصل جمع از آنجا که بدون در نظر گرفتن علامت ۸ از ۶ بزرگتر است پس علامت عدد ۸ که منفی (-) است را قرار می دهیم. بنابراین

$$-6+8=-2$$

مثال: حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید.

الف) $14 + (+16) = 14 + 16 = 30$

ب) $(+5) + (-4) = 5 - 4 = 1$

ج) $45 - 23 = 45 + (-23) = 45 - 23 = 22$

د) $-12 - (-5) = -12 + (-(-5)) = -12 + 5 = -(12 - 5) = -7$

ه) $(+17) - (+13) = 17 + (-13) = 17 - 13 = 4$

و) $-6 + (-5) = -(6 + 5) = -11$

ی) $-4 - (+8) = (-4) + (-8) = -12$

نکته:

۱- در جمع دو عدد صحیح، اگر علامت دو عدد یکسان باشد، علامت حاصل جمع با علامت دو عدد یکسان است.

الف) $(-12) + (-8) = -20$

ب) $(+13) + (+7) = +20$

۲- در جمع دو عدد صحیح، اگر علامت دو عدد متفاوت باشد، علامت حاصل جمع با علامت عددی که بدون در نظر گرفتن علامتش مقدار بزرگتری دارد، یکسان است.

$$\text{الف) } (-18) + (+4) = -14$$

↓

بدون در نظر گرفتن علامت

مقدار بزرگتری دارد

↑

$$\text{ب) } (+20) + (-4) = +16$$

❖ جمع و تفریق اعداد صحیح به روش ارزش مکانی

تفاوت بارزی که بین این روش و روش معمول وجود دارد، این است که اولاً در این روش اعداد صحیح منفی نقش اصلی را بازی می‌کنند، ثانیاً در هر ارزش مکانی، یعنی یکان، دهگان، صدگان و ... هر عمل جمع و تفریق جداگانه صورت می‌گیرد.

مثال: حاصل جمع و تفریق‌های زیر را به دست آورید.

دهگان	یکان	یکان: $6 - 4 = 6 + (-4) = 2$
۵	۶	دهگان: $5 - 3 = 5 + (-3) = 5 - 3 = 2$
-۳	۴	
۲	۲	$\Rightarrow \overbrace{(2 \times 10)}^{\text{ده تایی}} + \overbrace{(2 \times 1)}^{\text{یکی}} = 20 + 2 = 22$

دهگان	یکان	یکان: $-5 + 2 - 1 = -(5 - 2) - 1 = -3 - 1 = -3 + (-1)$
		$= -(3 + 1) = -4$

-۴	۵
+۶	۲
-۵	۱
-۳	-۴

$$\begin{aligned} \text{دهگان: } -4 + 6 - 5 &= (6 - 4) - 5 = 2 - 5 = 2 + (-5) \\ &= -(5 - 2) = -3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overbrace{(-3 \times 10)}^{\text{ده تایی}} + \overbrace{((-4) \times 1)}^{\text{یکی}} = -30 + (-4) = -(30 + 4) = -34$$

مثال: حاصل عبارت زیر را با روش ارزش مکانی بدست آورید.

$$-343 + 792 - 530 = ?$$

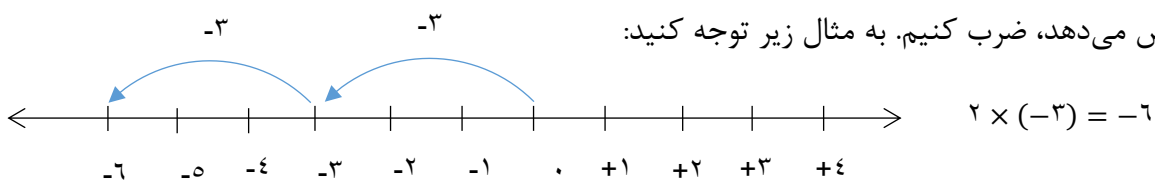
صدگان	دهگان	یکان
-۳	۴	۳
۷	۹	۲
-۵	۳	۰
-۱	۲	-۱

$$-100 + 20 - 1 = -81$$

❖ ضرب و تقسیم اعداد صحیح

در جمع و تفریق عددهای صحیح، با حرکت روی محور اعداد آشنا شدیم. حال اگر حرکت‌های انجام شده روی محور عددهای صحیح، کاملاً یکسان باشند؛ یعنی هم اندازه و هم علامت باشند، می‌توان جمع را به صورت ضرب بیان کرد. برای این کار، کافی است تا تعداد حرکت‌ها را در عددی که هر حرکت

نمایش می‌دهد، ضرب کنیم. به مثال زیر توجه کنید:



نکته: ضرب دو عدد صحیح ۴ حالت دارد:

(۱) هر دو مثبت، $(+۳) \times (+۲)$ (۲) اولی مثبت، دومی منفی، $(+۳) \times (-۴)$

(۳) اولی منفی، دومی مثبت، $(-۱) \times (+۵)$ (۴) هر دو منفی، $(-۳) \times (-۶)$

اگر هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند، علامت حاصل ضرب آن‌ها مثبت است و اگر یکی مثبت و دیگری منفی باشد، علامت حاصل ضرب آن‌ها منفی است.

اگر بخواهیم با شکل نشان دهیم، داریم:

$$\begin{array}{cc} (+) \times (+) = (+) & (-) \times (+) = (-) \\ (+) \times (-) = (-) & (-) \times (-) = (+) \end{array}$$

نکته: در ضرب تعدادی عدد صحیح، اگر تعداد اعداد منفی، زوج باشد، علامت حاصل ضرب آن‌ها مثبت، و اگر تعداد اعداد منفی، فرد باشد، علامت حاصل ضرب آن‌ها منفی خواهد بود.

✓ تقسیم

علامت حاصل تقسیم نیز دقیقاً مانند علامت حاصل ضرب بدست می‌آید که آن را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد.

÷	+	-
+	+	-
-	-	+

مثال: حاصل تقسیم‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(-14) \div (+2) = -7$

ب) $(-21) \div (-7) = +3$

نکته:

۱- وقتی دو عدد صحیح را بر هم تقسیم می‌کنیم، می‌توان عدد اول را در معکوس عدد دوم ضرب کرد. در معکوس کردن یک عدد، علامت آن عدد تغییر نمی‌کند. مانند:

الف) $(-12) \div (+2) = -12 \times \frac{1}{+2} = -6$

ب) $14 \div (-7) = 14 \times \frac{1}{-7} = -2$

۲- هرگاه در تقسیم دو عدد صحیح بر هم، عدد اول بر عدد دوم بخش‌پذیر نباشد. حاصل را به صورت یک کسر می‌نویسیم که عدد اول در صورت کسر و عدد دوم در مخرج کسر قرار می‌گیرد. مانند:

الف) $(-4) \div (+7) = \frac{-4}{7}$

ب) $(-13) \div (-2) = \frac{-13}{-2} = +\frac{13}{2}$

۳- علامت یک کسر را در یکی از جاهای زیر می‌توان قرار داد:

(۱) پشت کسر: $-\frac{2}{5}$ (۲) در صورت کسر: $\frac{-2}{5}$ (۳) در مخرج کسر: $\frac{2}{-5}$

که هر سه حالت یکسان هستند.

۴- هنگامی که دو عمل (ضرب \times) و (تقسیم \div) پشت سر هم آمده باشند، اولویت با عملی است که در سمت چپ قرار دارد.

نکته:

۱- برای به دست آوردن دو عدد صحیح که مجموع و تفاضل آنها داده شده است، از رابطه‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\text{تفاضل} + \text{مجموع}}{۲} , \frac{\text{تفاضل} - \text{مجموع}}{۲}$$

۲- اگر مجموع دو عدد صحیح را داشته باشیم، حاصل ضرب این دو عدد وقتی بیشترین مقدار خود را دارد که آن دو عدد با هم برابر باشند.

مثال: اگر مجموع دو عدد صحیح ۱۴ باشد، بیشترین مقدار حاصل ضرب آنها چقدر است؟

پاسخ:

$$\text{بیشترین مقدار حاصل ضرب } ۷ \times ۷ = ۴۹ , ۱۴ \div ۲ = ۷$$

مثال: مجموع دو عدد صحیح برابر با ۸ و تفاضل آنها برابر با ۲۰ است. آن دو عدد را بدست آورید.

پاسخ:

$$\frac{\text{تفاضل} + \text{مجموع}}{۲} , \frac{\text{تفاضل} - \text{مجموع}}{۲}$$

$$\frac{۸ + ۲۰}{۲} = ۱۴ , \frac{۸ - ۲۰}{۲} = \frac{-۱۲}{۲} = -۶$$

❖ اولویت در چهار عمل اصلی

اگر بخواهیم بحث اولویت در چهار عمل اصلی را به طور خلاصه بیان کنیم، می‌توانیم بگوییم:

اول: عبارت‌های داخل پرانتز

دوم: ضرب و تقسیم

سوم: جمع و تفریق

مثال:

$$\begin{aligned} -4 \times (3 \div (-4) + (1 + 2 \times (1 - 2)) \times 2) &= -4 \times \left(-\frac{3}{4} + (1 + (-2)) \times 2 \right) \\ &= -4 \times \left(-\frac{3}{4} + (-1) \times 2 \right) = -4 \times \left(-\frac{3}{4} + (-2) \right) \\ &= -4 \times \left(-\frac{3}{4} - 2 \right) = -4 \times \left(-\frac{11}{4} \right) = 11 \end{aligned}$$

نکته: اگر به چند عمل هم اولویت برخورد کردیم، اولویت اعمال از چپ به راست است. در واقع هر کدام را

که زودتر دیدیم، زود انجام می‌دهیم! پس به عنوان مثال

$$2 - 3 + 4 = -1 + 4 = +3 \quad 1 - 3 - 5 = -2 - 5 = -7$$