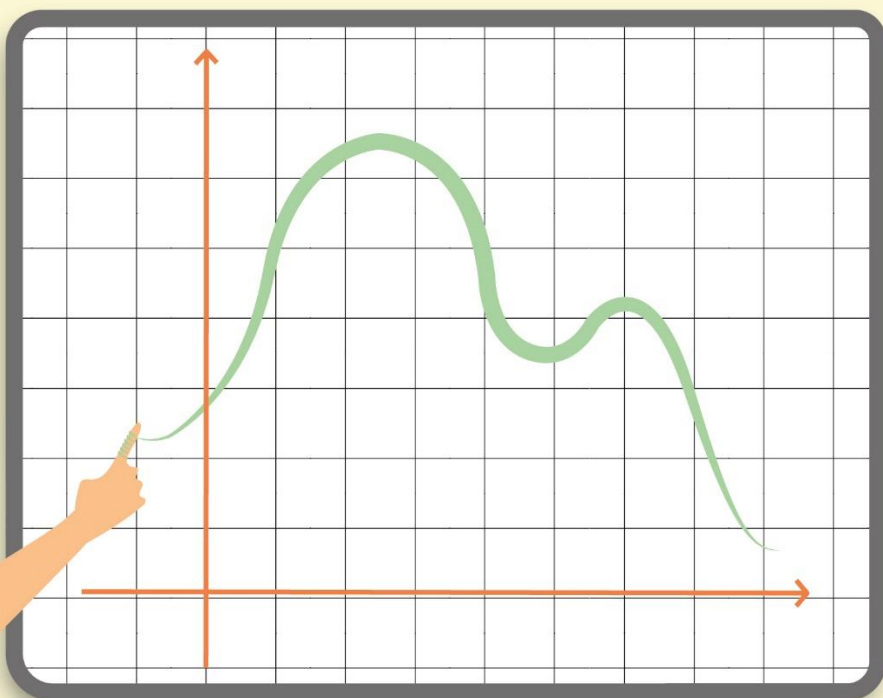


حسابان یازدهم

منوچه دوم

(نکات و خلاصه درس)



فصل اول. درس دوم: معادلات درجه دوم

در ریاضی، معادلاتی که به فرم زیر باشند را معادلات درجه دو می‌گویند.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

که جواب‌های آن در صورت وجود ($\Delta = b^2 - 4 \times a \times c > 0$) از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2 \times a}$$

اگر $\Delta = 0$ ، آنگاه معادله دارای جواب $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2 \times a}$ است که به این حالت جواب مضاعف

می‌گوییم.

اگر $\Delta < 0$ ، معادله فاقد ریشه حقیقی است.

نکته‌ها

نکته ۱: اگر جمع ضرایب معادله درجه دو $(a + b + c)$ برابر با صفر شود، یکی از ریشه‌ها

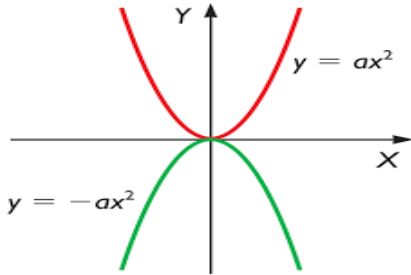
$x = 1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.

نکته ۲: اگر $a + c = b$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.



حالت‌های منحنی درجه دو

منحنی تابع درجه دو، دارای دو حالت است و با استفاده از تعداد ریشه‌ها و ضریب x^2 رسم می‌شود.



برای رسم تابع درجه دو، ابتدا تابع رو به فرم زیر تبدیل می‌کنیم.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

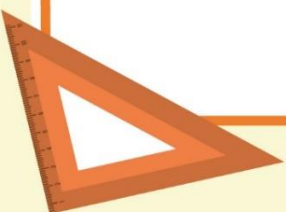
سپس با توجه به علامت $a > 0$ (تقعر) (دهانه سهمی رو به بالا) یا $a < 0$ (تحدب) (دهانه سهمی رو به پایین) نمودار را پیدا می‌کنیم و سپس با استفاده از ریشه‌های معادله و دادن مقدار به x نمودار را رسم می‌کنیم. اگر $a > 0$ باشد، سهمی دارای نقطه $\min$ است و اگر $a < 0$ باشد، سهمی دارای نقطه $\max$ است.

روابط بین ضرایب و ریشه‌های درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دو زیر و در آن $\Delta > 0$ باشد، آنگاه بین ریشه‌ها روابط زیر وجود دارد.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- $\alpha + \beta = s = -\frac{b}{a}$



- $\alpha \times \beta = p = \frac{c}{a}$
- $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
- $\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p$
- $\alpha^3 + \beta^3 = s^3 - 3sp$
- $\alpha^4 + \beta^4 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2$
- $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{s}{p}$
- $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{s^2 - 2p}{p^2}$
- $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{s + 2\sqrt{p}}$
- $|\sqrt{\alpha}| - \sqrt{\beta} = \sqrt{s - 2\sqrt{p}}$

پیدا کردن علامت ریشه‌ها و وضعیت ریشه‌ها نسبت به هم بدون حل معادله

اگر در معادله درجه دوم زیر $\Delta > 0$ باشد، آنگاه در این معادله، روابط زیر وجود دارد.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- | | | |
|---|---|-----------------|
| <ul style="list-style-type: none"> • $p > 0$ | $\left\{ \begin{array}{l} S > 0 \\ S < 0 \end{array} \right.$ | هر دو ریشه مثبت |
| | | هر دو ریشه منفی |
- ریشه‌ها هم علامت هستند.



ریشه مثبت از قدر مطلق ریشه منفی بزرگتر است $S > 0$

$$\bullet p < 0$$

معادله دو ریشه قرینه دارد $S = 0$ ریشه ها غیرهم علامت هستند.

قدر ریشه مطلق منفی از ریشه مثبت بزرگتر است $S < 0$

یک ریشه صفر است $\rightarrow P = 0$

علامت ضرایب سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از روی نمودار

a : با نگاه به شکل سهمی می توان علامت a را مشخص کرد. اگر دهانه سهمی به سمت بالا باشد

$a > 0$ و اگر دهانه سهمی رو به پایین باشد $a < 0$ است.

b : طول راس سهمی برابر با $x = -\frac{b}{2a}$ است که با توجه به a, x می توان علامت b را مشخص

کرد.

c : محل برخورد سهمی با محور y ها است و از روی نمودار علامت آن مشخص است.

صفرهای تابع

برای هر تابع مثل f جواب های معادله $f(x) = 0$ را صفرهای تابع گوییم. به عبارت دیگر مقادیری

از x هستند که به ازای آن $f(x) = 0$ می شود.



پیدا کردن نقطه راسی نمودار درجه دو

اگر نقطه راسی تابع $ax^2 + bx + c = 0$ به نام x باشد. مختصات آن به صورت زیر است.

$$x = \left(-\frac{b}{2 \times a} \text{ و } -\frac{\Delta}{4 \times a} \right)$$

روش هندسی حل معادلات

اگر $f(x)$, $g(x)$ دو تابع باشند. طول نقاط تلاقی این دو منحنی، جوابهای معادله $f(x)=g(x)$ است و

بالعکس. در این روش تعداد جواب و مقدار تقریبی آنها مشخص می شود. این روش، روش هندسی

حل معادلات نامیده می شود.

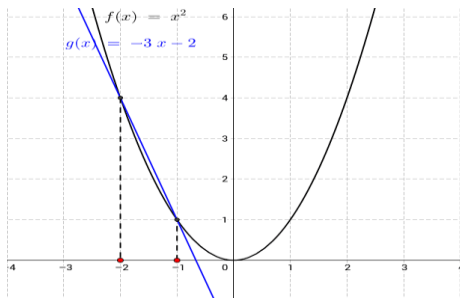
مثال ها

مثال ۱: معادله زیر را به روش هندسی حل کنید.

$$f(x) = x^2 . g(x) = -3x - 2$$

$$x^2 = -3x - 2$$

پاسخ: محل تلاقی این دو نمودار نقاطی به طولهای -2 . -1 است.



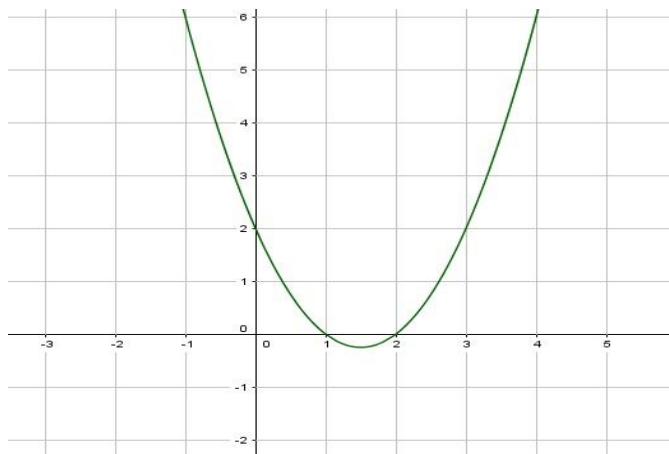
مثال ۲: مختصات راسی نقطه $x^2 - 8x + 15 = 0$ را بدون حل معادله بیابید.

پاسخ:

$$b = -8, a = 1, \Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 64 - 4(1) \times (15) = 4$$

$$x = \left(\frac{-(-8)}{2 \times 1}, \frac{-4}{4} \right) = (4, -1)$$

مثال ۳: فرم کلی معادله درجه دو را با استفاده از نمودار زیر به دست آورید.



پاسخ: $x_1 = 1, x_2 = 2$ ریشه های معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ است.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - 2)(x - 1)$$

$$2 = a(0 - 2) \times (0 - 1) \rightarrow a = 1$$

معادله تابع درجه دو به صورت زیر است.

$$y = 1 \times (x - 2) \times (x - 1) = x^2 - 3x + 2$$



مثال ۴: مقدار m را برای معادله زیر به دست آورید که دو ریشه قرینه داشته باشد.

$$mx^2 + (m^2 - 4)x + m - 3 = 0$$

پاسخ: معادله دارای دو ریشه قرینه است پس مجموع ریشه ها صفر است.

$$S = \frac{-b}{a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow m^2 - 4 = 0 \rightarrow m = \pm 2$$

$$m = 2 \rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{دو ریشه قرینه دارد}$$

$$m = -2 \rightarrow -2x^2 - 5 = 0 \quad \text{ریشه ندارد}$$

پس فقط $m = 2$ قابل قبول است.

مثال ۵: بدون حل معادله زیر و با استفاده از S, P, Δ تعداد و علامت ریشه ها را مشخص کنید.

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

پاسخ:

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 64 - 4(1)(15) = 4 > 0$$

$\Delta > 0 \rightarrow$ پس دارای دو ریشه α, β است

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{1} = 8$$

$$P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = 15 \quad \text{هر دو ریشه مثبت و هم علامتند و دارای دو ریشه است}$$



مثال ۶: اگر α, β ریشه های معادله درجه دو زیر باشند. آنگاه $\alpha^2 + \beta^2$ را به دست آورید.

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

پاسخ:

$$S = 2, P = -4 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p = 4 - 2(-4) = 12$$

مثال ۷: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = x^2 - x - 2$$

پاسخ:

تقعر به بالا $a = 1 > 0$

$$x_1 \text{ و } x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2 \times a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2 \text{ و } -1$$

سپس با استفاده از ریشه های معادله و تقعر به بالا می توان نمودار را رسم کرد.

