

ریاضی نهم

منوچه اول

(نمونه سوالات حل شده)



(تمامی حقوق متعلق به مجتمع
آموزشی و پژوهشی ثمین می باشد.)

فصل ۵- عبارتهای جبری

مثال‌ها

مثال ۱: در عبارتهای زیر، یک جمله‌ای‌های جبری را مشخص کنید.

$$(-xy^2)^3(5x^2y) \text{ و } \frac{-x}{2y} \text{ و } 3x^5 \text{ و } \sqrt{7}x^3y^2z \text{ و } 7^x \text{ و } x^2 - y^2 \text{ و } -1/4$$

پاسخ:

$$\boxed{\frac{(-xy^2)^3(5x^2y)}{(-x^3y^6)(5x^2y)}} \text{ و } \underbrace{\frac{-x}{2y}}_{\frac{-1}{2}xy^{-1}} \text{ و } \boxed{3x^5} \text{ و } \boxed{\sqrt{7}x^3y^2z} \text{ و } 7^x \text{ و } x^2 - y^2 \text{ و } \boxed{-1/4}$$

مثال ۲: حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $(x^3y)^2(\frac{1}{4}x^2y)^3 =$

ب) $(10x)^2(-2xy)^3(xyz)^2 =$

پ) $(7x^2y)(-2xy^2) + (2x^3)(3x)^3 =$

پاسخ:

الف) $(x^3y)^2(\frac{1}{4}x^2y)^3 = (x^6y^2)((\frac{1}{4})^3x^6y^3) = (x^6y^2)\left(\frac{1}{64}x^6y^3\right) = \frac{1}{64}x^{12}y^5$

ب) $(10x)^2(-2xy)^3(xyz)^2 = (100x^2)(-8x^3y^3)(x^2y^2z^2) = -800x^7y^5z^2$

پ) $(7x^2y)(-2xy^2) + (2x^3)(3x)^3 = -14x^3y^3 + (2x^3)(27y^3)$

$$= -14x^3y^3 + 54x^3y^3 = 40x^3y^3$$

مثال 3: جدول زیر را کامل کنید.

	$\frac{\sqrt{3}}{3}abc$	$8^7ax^8w^3$	$-4xy$	32	$-\frac{3}{5}b^4dp^3q^3$
متغیرها					
درجه نسبت به تک تک متغیرها					
درجه نسبت به همه‌ی متغیرها					

پاسخ:

متغیرها	درجه نسبت به تک تک متغیرها	درجه نسبت به همگی متغیرها
$\frac{\sqrt{3}}{3}abc$	$a \Rightarrow$ نسبت به 1 $b \Rightarrow$ نسبت به 1 $c \Rightarrow$ نسبت به 1	۳
$-4xy$	$x \Rightarrow$ نسبت به 1 $z \Rightarrow$ نسبت به 1	2
32	-	0
$-\frac{3}{5}b^4dp^3q^3$	$b \Rightarrow$ نسبت به 4 $d \Rightarrow$ نسبت به 1 $p \Rightarrow$ نسبت به 3 $q \Rightarrow$ نسبت به 3	11

مثال ۴: جملات زیر را یک بار نسبت به x و بار دیگر نسبت به y مرتب کنید.

الف) $y + 3x + x^2y^2$

ب) $x^2y + 5xy^2 + y^4 - 1 + x^3$

پاسخ:

الف) $\begin{cases} x^2y^2 + 3x + y : \text{نسبت به } x \\ x^2y^2 + y + 3x : \text{نسبت به } y \end{cases}$

$$ب) \begin{cases} x^3 + x^2y + 5xy^2 + y^4 - 1 \\ y^4 + 5xy^2 + x^2y + x^3 - 1 \end{cases}$$

نسبت به x : $x^3 + x^2y + 5xy^2 + y^4 - 1$
نسبت به y : $y^4 + 5xy^2 + x^2y + x^3 - 1$

مثال ۵: با نمادهای $=$ و $\neq$ جاهای خالی مربوط به اتحادهای زیر را کامل کنید.

الف) $(x - 3)^2 \square x^2 + 9 + 6x$

ب) $(x + 2)(x - 2) \square x^2 - 4$

پ) $(x - 2)^3 \square x^3 - 8$

ت) $(x - 1)^2 \square x^2 - 1$

پاسخ:

الف) $\underbrace{(x - 3)^2}_{\text{اتحاد مربع تفاضل}} \square x^2 + 9 + 6x$
 $x^2 - 6x + 9$

ب) $(x + 2)(x - 2) \equiv x^2 - 4$

$\underbrace{\text{اتحاد مزدوج}}_{x^2 - 4}$

پ) $(x - 2)^3 \square x^3 - 8$

$(x - 2)^3 = (x - 2) \underbrace{(x - 2)^2}_{\text{اتحاد مربع تفاضل}} = (x - 2)(x^2 - 4x + 4)$

$= x^3 - 4x^2 + 4x - 2x^2 + 8x - 8 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

ت) $(x - 1)^2 \square x^2 - 1$

$\underbrace{\text{اتحاد مربع تفاضل}}_{x^2 - 2x + 1}$

مثال ۶: حاصل اتحادهای زیر را بدست آورید.

الف) $(2b^2 - 1)^2 =$ ب) $(a + 3b)^2 =$ پ) $(2x^2 - 3y^3)^2$

پاسخ:

الف) $(2b^2 - 1)^2$ اتحاد مربع تفاضل $4b^4 - 4b^2 + 1$

ب) $(a + 3b)^2$ اتحاد مربع مجموع $a^2 + 6ab + 9b^2$

پ) $(2x^2 - 3y^3)^2$ اتحاد مربع تفاضل $4x^4 - 12x^2y^3 + 9y^6$

مثال ۷: چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $13x^3 - 39x^2y + 78x^4y =$

ب) $7ab^2 - (2ab)^3 + 8a^3b^2 =$

پ) $-16mn + 5m^2n^2 + 25m^3n =$

ت) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}xy + y^2 =$

پاسخ:

الف) $13x^3 - 39x^2y + 78x^4y =$

ب.م.م ضرایب این جملات ۱۳ است و حروف مشترک با کمترین توان در بین این جملات برابر

است با x^2 ، لذا ب.م.م برابر است با $13x^2$ است. اکنون داریم:

$$\rightarrow \div 13x^2 = 3xy$$

الف) $13x^3 - 39x^2y + 78x^4y = 13x^2(x - 3xy + 6x^2y)$

$$\rightarrow \div 13x^2 = x$$

$$\rightarrow \div 13x^2 = 6x^2y$$

ب) $7ab^2 - (2ab)^3 + 8a^3b^2 = 7ab^2 - 8a^3b^3 + 8a^3b^2$

ب.م.م ضرایب این جملات ۱ و حروف مشترک با کمترین توان ab^2 است، بنابراین ب.م.م ab^2

می باشد. لذا داریم:

$$\rightarrow \div ab^2 = 8a^2b$$

$$7ab^2 - 8a^3b^3 + 8a^3b^2 = ab^2(7 - 8a^2b + 8a^2)$$

$$\rightarrow \div ab^2 = 1$$

$$\rightarrow \div ab^2 = 8a^2$$

پ) $-16mn + 5m^2n^2 + 25m^3n =$

ب.م.م ضرایب برابر است با ۱ و حروف مشترک با توان کمتر برابر است با mn است. لذا ب.م.م

برابر است با mn .

$$\rightarrow \div mn = 5mn$$

$$-16mn + 5m^2n^2 + 25m^3n = mn(-16 + 5mn + 25m^2)$$

$$\rightarrow \div mn = -16$$

$$\rightarrow \div mn = 25m^2$$

ت) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}xy + y^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{5}} - y\right)^2$

مثال ۸: با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(1/2)^2 + 2(1/2)(0/8) + (0/8)^2 =$

ب) $((3a - 2b) - (a + b))((3a - 2b) + (a + b)) =$

پ) $(2/5)^2 - 2(2/5)(0/5) + (0/5)^2 =$

ت) $(2^x - 3^y)(2^x + 3^y) =$

پاسخ:

الف) $(1/2)^2 + 2(1/2)(0/8) + (0/8)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع مجموع}} (1/2 + 0/8)^2 = 2^2$
 $= 4$

ب) $((\underbrace{3a - 2b}_{\text{جمله اول}}) - \underbrace{(a + b)}_{\text{جمله دوم}})(\underbrace{(3a - 2b)}_{\text{جمله اول}} + \underbrace{(a + b)}_{\text{جمله دوم}}) = \underbrace{(3a - 2b)^2}_{\text{اتحاد مربع تفاضل}} - \underbrace{(a + b)^2}_{\text{اتحاد مربع مجموع}}$
 $= 9a^2 - 12ab + 4b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
 $= \underline{9a^2} - \underline{12ab} + \underline{4b^2} - \underline{a^2} - \underline{2ab} - \underline{b^2} = 8a^2 - 14ab + 3b^2$

پ) $(2/5)^2 - 2(2/5)(0/5) + (0/5)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع تفاضل}} (2/5 - 0/5)^2 = 2^2 = 4$

ت) $(2^x - 3^y)(2^x + 3^y) = (2^x)^2 - (3^y)^2 = 2^{2x} - 3^{2y}$

مثال ۹: جاهای خالی را کامل کنید.

الف) $(3a + 5)(3a - 4) = 9a^2 + \square - \bigcirc$

ب) $(a + 2\sqrt{2})(a - 3\sqrt{2}) = -\bigcirc - \square + a^2$

پ) $(4x^2 - 10)(4x^2 + 5) = \bigcirc - 50 + \square$

پاسخ:

الف) $(3a + 5)(3a - 4) = (3a)^2 + \overbrace{(5 - 4)}^1 (3a) + (5)(-4) = 9a^2 + 3a - 20$

ب) $(a + 2\sqrt{2})(a - 3\sqrt{2}) = a^2 + \overbrace{(2\sqrt{2} - 3\sqrt{2})}^{-\sqrt{2}} (a) + (2\sqrt{2})(-3\sqrt{2})$
 $= a^2 - \sqrt{2}a - 6(\sqrt{2^2}) = a^2 - \sqrt{2}a - 12$

پ) $(4x^2 - 10)(4x^2 + 5) = (4x^2)^2 + (-10 + 5)(4x^2) + (-10)(5)$
 $= 16x^4 - 20x^2 - 50$

مثال ۱۰: با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\left(-b^2c^5 + \frac{1}{2}\right)\left(-b^2c^5 - \frac{1}{5}\right) =$

ب) $(3x^2 - 4)(3x^2 + 1) - 9x^4 + 4 =$

پ) $(m + 1 + n)(-n + m - 1) + 1 =$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \left(-b^2c^5 + \frac{1}{2}\right)\left(-b^2c^5 - \frac{1}{5}\right) &= (-b^2c^5)^2 + \overbrace{\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right]}^{\frac{5-2}{10} = \frac{3}{10}}(-b^2c^5) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) \\ &= b^4c^{10} - \frac{3}{10}b^2c^5 - \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\text{ب)} (3x^2 - 4)(3x^2 + 1) - 9x^4 + 4 =$$

$$\begin{aligned} &= 9x^4 + (-4 + 1)(3x^2) + (-4)(1) - 9x^4 + 4 = 9x^4 - 9x^2 - 4 - 9x^4 + 4 \\ &= -9x^2 \end{aligned}$$

$$\text{پ)} (m + 1 + n)(-n + m - 1) + 1 =$$

$$\begin{aligned} &= (m + (n + 1))(m - (n + 1)) + 1 = m^2 - (n + 1)^2 + 1 \\ &= m^2 - (n^2 + 2n + 1) + 1 = m^2 - n^2 - 2n \end{aligned}$$

مثال ۱۱: نابرابری مربوط به هر مجموعه را بنویسید.

الف)



$$\text{ب)} \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\} =$$

$$\text{پ)} \{15, 16, 17, \dots\} =$$

پاسخ:

الف) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ و } -10 < x \leq 10\}$

ب) $\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -7 < x < 1\}$

ج) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } x \geq 15\}$

مثال ۲: در هر قسمت با توجه به تغییرات ارائه شده، نامعادله‌ی جدید را بیابید.

الف) $x > y \xrightarrow{\times a^2}$

ب) $m < n \xrightarrow{-b}$

پ) $c > d \xrightarrow{\div (-4)}$

پاسخ:

الف) نکته:

اگر دو طرف نامعادله را در عددی مثبت ضرب یا تقسیم کنیم، جهت نامساوی تغییری نمی‌کند.

می‌دانیم که توان دوم هر عدد، یک عدد مثبت است، لذا داریم:

$$x > y \xrightarrow{\times a^2} a^2x > a^2y$$

(ب) نکته:

اگر از دو طرف نامعادله یک عدد مساوی را کم کنیم، جهت نامساوی تغییری نمی‌کند.

$$m < n \xrightarrow{-b} m - b < n - b$$

(پ) نکته:

اگر دو طرف نامعادله را در عددی منفی ضرب یا تقسیم کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند.

$$c > d \xrightarrow{\div (-4)} \frac{c}{-4} < \frac{d}{-4}$$

مثال ۱۳: مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را بدست آورید.

الف) $5x - 7 \leq 13$

ب) $3(3x - 2) \geq \frac{1}{3}(x - 4)$

پ) $\frac{-x}{3} + \frac{2x}{5} > \frac{2x - 1}{10}$

ت) $\frac{1}{4}(x - 5) - \frac{x}{8} \geq \frac{(3x - 1)}{12} + \frac{5x}{6}$

پاسخ:

الف) $5x - 7 \leq 13 \Rightarrow 5x \leq 13 + 7 \Rightarrow 5x \leq 20 \xrightarrow{\div 5 \text{ طرف دو}} \frac{5x}{5} \leq \frac{20}{5} \Rightarrow x \leq 4$

دقت کنید که چون عدد ۵ عددی مثبت است، لذا در تقسیم طرفین نامعادله بر ۵، جهت نامساوی

عوض نمی‌شود.

$$\text{ب) } 3(3x - 2) \geq \frac{1}{3}(x - 4) \xrightarrow{\times 3 \text{ طرف}} 9(3x - 2) \geq (x - 4)$$

$$\Rightarrow 27x - 18 \geq x - 4 \Rightarrow 27x - x \geq 18 - 4$$

$$\Rightarrow 26x \geq 14 \Rightarrow x \geq \frac{14}{26} \Rightarrow x \geq \frac{7}{13}$$

$$\text{پ) } \frac{-x}{3} + \frac{2x}{5} > \frac{2x - 1}{10}$$

ک.م.م. مخرج ها ۳۰ است، پس همه‌ی جملات دو طرف نامعادله را در ۳۰ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{-x}{3} + \frac{2x}{5} > \frac{2x - 1}{10} \xrightarrow{\times 30} -\frac{30x}{3} + \frac{60x}{5} > \frac{30(2x - 1)}{10}$$

$$\Rightarrow -10x + 12x > 3(2x - 1) \Rightarrow -10x + 12x > 6x - 3$$

$$\Rightarrow 2x > 6x - 3 \Rightarrow 3 > 4x$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر 4}} \frac{3}{4} > \frac{4x}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} > x$$

$$\text{ت) } \frac{1}{4}(x - 5) - \frac{x}{8} \geq \frac{(3x - 1)}{12} + \frac{5x}{6}$$

ک.م.م مخرج ها ۲۴ است، لذا ابتدا همه ی جملات دو طرف نامعادله را در ۲۴ ضرب می کنیم.

$$\frac{1}{4}(x-5) - \frac{x}{8} \geq \frac{(3x-1)}{12} + \frac{5x}{6}$$

$$\xrightarrow{\times 24 \text{ دوطرف}} \frac{24}{4}(x-5) - \frac{24}{8}x \geq \frac{24(3x-1)}{12} + \frac{24(5x)}{6}$$

$$\Rightarrow 6(x-5) - 3x \geq 2(3x-1) + 4(5x)$$

$$\Rightarrow 6x - 30 - 3x \geq (6x - 2) + 20x \Rightarrow 3x - 30 \geq 26x - 2$$

$$\Rightarrow -30 + 2 \geq 26x - 3x \Rightarrow -28 \geq 23x \xrightarrow{\div 23} \frac{-28}{23} \geq x$$

مثال ۱۴: هر عبارت کلامی را به صورت یک نامعادله بنویسید.

الف) اگر به ۴ برابر عددی، سه واحد اضافه کنیم، حاصل از ۱۰ برابر آن عدد کوچک تر می شود.

ب) مجموع نصف عدد a و ربع عدد b ، حداقل ۱۰ است.

پ) اگر از ۱۰ برابر عددی ۳۰۰۰ واحد کم کنیم، حاصل حداکثر ۸۰۰۰ واحد می شود.

پاسخ:

الف)

$$\text{عدد مورد نظر } x \xrightarrow{4 \text{ برابر}} 4x \xrightarrow{3 \text{ واحد اضافه کنیم}} 4x + 3$$

$$\xrightarrow{\text{لصاح زا 10 برابر تا ددع کوچکتر}} 4x + 3 < 10x$$

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ : نصف عدد } \frac{a}{2} \\ b \text{ : ربع عدد } \frac{b}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{4} \xrightarrow{\text{حداقل 10}} 10 \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{4}$$

$$\text{عدد} : x \xrightarrow{10 \text{ برابر}} 10x \xrightarrow{3000 \text{ واحد كم كنيم}} 10x - 3000$$

$$\xrightarrow{\text{حداكثر 8000}} 10x - 3000 \leq 8000$$

مثال ۱۵: اگر $a^2bc < 0$ باشد، در این صورت هر یک از ضرایب دارای چه علامتی هستند؟

متغیر a چه مثبت باشد و چه منفی، $a^2 > 0$ است. و چون $a^2bc < 0$ است، در نتیجه تعداد اعداد

منفی می بایست فرد باشد. یعنی از بین b و c یکی منفی و دیگری مثبت می باشد.