

هندسه دهم

مسطحه دوم

(نکات و خلاصه درس)



فصل اول : ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس دوم: استدلال

در حل مسائل هندسی، همواره به استدلالی نیاز است که درستی یا نادرستی هریک را اثبات می‌کند.

در این گونه موارد، معمولاً به دو صورت با مسأله برخورد می‌شود:

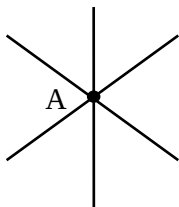
۱- استدلال استقرایی: در این روش، بر اساس مجموعه محدودی از مشاهدات، یک نتیجه گیری کلی انجام می‌دهیم، یعنی:
«استدلال استقرایی، رسیدن از جز به کل است.»

۲- استدلال استنتاجی: در این روش، بر اساس مفاهیمی که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته ایم، یک نتیجه گیری کلی انجام می‌دهیم. بنابراین:
«استدلال استنتاجی، رسیدن از کل به جزء است و یک نتیجه گیری منطقی است.»

خطوط هم‌رس :

چند خط که همگی در یک نقطه مانند A، مشترک باشند را هم‌رس گویند.

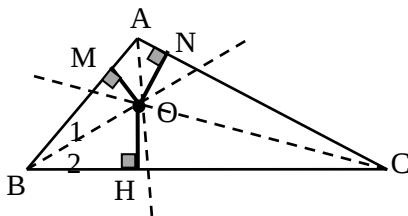
به عنوان مثال، در شکل مقابل، نقطه A را در نقطه هم‌رسی این خط‌ها می‌نامیم.



مثال: نشان دهید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث، هم‌رس اند.

پاسخ:

مثلث دلخواه ABC را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را رسم کرده و نقطه تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم. همچنین با رسم عمودهایی از O بر اضلاع، فاصله نقطه O تا ۳ ضلع را به صورت OM ، ON و OH مشخص می‌کنیم. اکنون توجه داریم:



چون نقطه O ، روی نیمساز زاویه A قرار دارد، پس داریم: $OM = ON$

و به همین ترتیب چون O روی نیمساز زاویه B قرار دارد، پس داریم: $OM = OH$.

از روابط ① و ② نتیجه می‌گیریم که $ON = OH$. یعنی فاصله نقطه O تا دو ضلع زاویه C (یعنی AC و BC) به یک فاصله است و در نتیجه نقطه O روی نیمساز زاویه $\hat{C}$ نیز، قرار دارد پس هر سه نیمساز در نقطه O هم‌رس هستند.



مثال نقض:

اگر یک حکم نادرست باشد، کافی است یک مثال بیاوریم که نادرست بودن آن را نشان دهد. به چنین مثالی، «مثال نقض» گفته می‌شود.

مثال: برای موارد زیر مثال نقض بیاورید و آن‌ها را رد کنید:

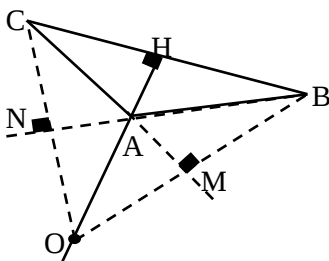
(الف) اگر $x^2 > 9$ باشد، در این صورت $x > 3$ است.

(ب) نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد.

پاسخ:

(الف) عدد $x = -4$ را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌شود که $x^2 = (-4)^2 = 16 > 9$ و $16 > 9$ برقرار است ولی $3 > -4$ (۴- بزرگتر، مساوی ۳ نیست!)، بنابراین حکم نادرست است.

(ب) کافی است مثلی با یک زاویه باز را به عنوان مثال نقض در نظر بگیریم، زیرا در این صورت نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها، خارج مثلث قرار می‌گیرد. مانند مثلث ABC.



گزاره، قضیه و قضیه شرطی:

گزاره: در ریاضیات، به هر ادعا یا خبری که یا «دقیقاً درست» و یا «دقیقاً نادرست» است،

یک گزاره می‌گوییم، گرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد.

۱- اگر گزاره فقط شامل یک خبر باشد، به آن یک گزاره «ساده» می‌گوییم.

۲- اگر گزاره شامل دو یا چند خبر باشد، به آن گزاره «مركب» می‌گوییم.

مثال:

① عدد ۵، یک عدد اول است (گزاره ساده)

جملات زیر یک گزاره هستند:

② فردا هوا بارانی است و ۴ عددی فرد است. (گزاره مركب)



نقیض یک گزاره :

اگر «p» یک گزاره باشد، گزاره «چنین نیست که p» را نقیض گزاره p می‌نامیم.

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید :

الف) a از b کوچک‌تر است.

ب) مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب، 360° است.

پاسخ:

الف) چنین نیست که a از b کوچک‌تر باشد (a از b کوچکتر نیست) که معادل است با «a از b بزرگتر و با برابر با b است.»

ب) چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر چهار ضلعی محدب، 360° باشد که معادل است با «چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن، 360° نیست.»



نکته :

نقیض هر می شود وجود دارد و بر عکس.

در برخورد با یک گزاره، باید یک یا دو حالت زیر را در نظر بگیریم:

(الف) هرگاه گزاره درست باشد، باید آن را با استدلال استنتاجی ثابت کنیم؛ که به این استدلال، "برهان" هم می گوئیم.

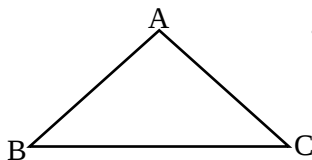
(ب) هرگاه گزاره نادرست باشد، باید برای آن‌ها مثال نقض ارائه کنیم.

توجه : در بین احکام درست، برخی از آن‌ها جایگاه خاصی دارند. در هندسه، گزاره‌هایی که کاربرد زیادی دارند، "قضیه" می نامیم. بنابراین :

قضیه: گزاره مهمی است که همواره درست است.



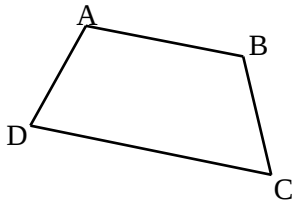
به عنوان نمونه به چند قضیه مهم این فصل اشاره می کنیم :



قضیه ۱: مجموع اندازه های زوایای داخلی هر مثلث، 180° است.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

قضیه ۲: مجموع اندازه های زوایای داخلی هر چهار ضلعی محدب، 360° است.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

قضیه ۳: سه عمود منصف اضلاع هر مثلث، هم‌رسند.

قضیه ۴: سه ارتفاع هر مثلث، هم‌رسند.

قضیه ۵: سه نیمساز زوایای داخلی هر مثلث، هم‌رسند. (در مثال های قبل اثبات گردید.)



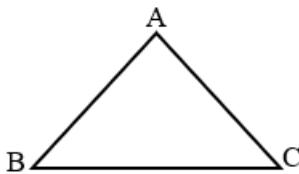
گزاره و قضیه شرطی:

می توان یک گزاره را به صورت زیر بیان کرد، که در این صورت به آن، "گزاره شرطی" می گوئیم:

«اگر فرض، آنگاه حکم»

اگر یک قضیه را به صورت شرطی بیان کنیم، به آن، «قضیه شرطی» گفته می شود. به عنوان مثال، قضیه شرطی زیر را می بینیم:

قضیه ۶ (نامساوی مثلثی): اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه رو به ضلع بزرگ تر، بزرگ تر است از زاویه روبه رو به ضلع کوچک تر. یعنی در شکل زیر، داریم:



فرض: $\underline{AB} < \underline{BC}$



حکم: $\hat{C} < \hat{A}$

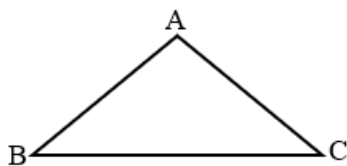


عکس قضیه:

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم، آنچه که حاصل می شود، عکس قضیه گفته می شود.

توجه: عکس یک قضیه شرطی، ممکن است یک قضیه نباشد، یعنی ممکن است حکمی نادرست شود. به عنوان مثال به عکس قضیه ۶ توجه کنید.

عکس قضیه ۶: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگتر، از ضلع روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.



فرض: $\hat{C} < \hat{A}$



حکم: $AB < BC$



برهان غیر مستقیم (برهان خلف):

گاهی برای حل یک مسئله، ارائه استدلال استنتاجی به صورت عادی، مشکل یا غیر ممکن است. در چنین صورتی، معمولاً روش اثبات غیر مستقیم به صورت زیر، راه گشاست :

(الف) فرض می کنیم نقیض حکم درست باشد (فرض خلف)

(ب) به کمک روش‌های درست ریاضی و با توجه به فرض مرحله قبل، به یک تناقض با فرض آن مسئله با یک قضیه یا گزاره همواره درست می‌رسیم.

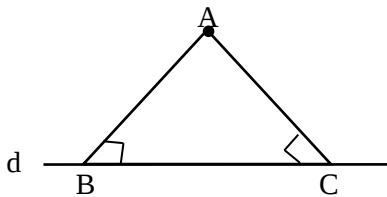
(پ) باتوجه به قسمت (ب)، نتیجه می‌گیریم نقیض حکم نادرست است و در نتیجه حکم درست است.



مثال: از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، نمی توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

پاسخ:

فرض: فرض می کنیم نقطه ای مانند A، غیرواقع بر خطی مانند d وجود دارد.



حکم: از نقطه A، نمی توان بیشتر از یک عمود بر خط d رسم نمود.

استدلال (برهان خلف): فرض می کنیم حکم نادرست باشد، یعنی فرض می کنیم از نقطه A، دو خط عمود بر d رسم کرده ایم که خط d را در نقاط B و C قطع کرده اند. در این صورت، مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بیشتر از 180° خواهد بود و این غیرممکن و نادرست است. پس امکان رسم دو خط عمود از یک نقطه غیرواقع بر یک خط وجود ندارد و حکم درست است.



قضیه دو شرطی:

هرگاه عکس یک قضیه شرطی، همواره درست باشد آن قضیه را می توان به صورت دو شرطی بیان کرد، یعنی:

«فرض، اگر و تنها اگر حکم»

مثال: قضیه فیثاغورس را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید.

پاسخ:

مثلث ABC قائم الزاویه است، اگر و تنها اگر $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

